www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail

ECOLE NATIONALE DES INGENIEURS DES TRAVAUX RURAUX ET DES TECHNIQUES SANITAIRES

STRASBOURG

CONCOURS D'ENTRÉE 1989

DEUXIÈME ÉPREUVE DE MATHEMATIQUES

OPTION BIOLOGIE-MATHÉMATIQUES DURÉE: 3 HEURES

PARTIE I

On définit deux fonctions réelles f et g par : $f(x) = \sqrt{|\cos x|}$

$g(x) = \sqrt{\operatorname{ch} x}$ pour tout x réel.

1. a. Donner les développements limités d'ordre 4 au voisinage de 0, de f et de g.

   b. On effectue les développements limités respectifs en 0 de f et de g à l'ordre 2n, $n \geqslant 1$, dont les parties régulières respectives sont P_n et Q_n.

   Comparer : $P_n(ix)$ et $Q_n(x)$ pour tout x réel, i complexe tel que : $i^2 = -1$.

2. a. Calculer $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} P_2(x) \operatorname{ch} x\, dx$ sous la forme : $\lambda \operatorname{ch}\frac{\pi}{2} + \mu \operatorname{sh}\frac{\pi}{2}$, λ et μ réels. Donner une valeur numérique de I à 10^{-2} près.

   b. Calculer $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} Q_2(x) \operatorname{ch} x\, dx$ sous la forme donnée précédemment.

3. Soit $P(x) = c\,(x+b)^2\,(a^2-x^2)$ avec $a \leqslant b$ réels positifs, c réel.
   Déterminer le polynôme P sachant que l'expression : $e^{2x}\cos x - P(x)$ ne s'annule pas sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et qu'elle est nulle en $x = \frac{\pi}{2}$ et $x = -\frac{\pi}{2}$ ainsi que sa dérivée première.

   On démontrera que : $c = \frac{4}{\pi^3}\left(\operatorname{sh}\frac{\pi}{2}\right)^2$

4. Calculer : $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{P(x)}\, dx$.

Partie II

1. Démontrer que si A et B sont deux polynômes réels de la variable réelle x, l'égalité : $A(x) \operatorname{ch} x + B(x) \operatorname{sh} x = 0$ pour tout x réel implique : $A = B = 0$.

2. Soit $E = \mathbb{R}_n[x]$ l'espace vectoriel des fonctions polynômes réelles de degré inférieur ou égal à n. Soit F l'espace vectoriel des fonctions réelles définies sur $\mathbb{R}$, dérivables. On définit l'application φ de E dans F par :

   $$\varphi(P)(x) = \int_0^x \operatorname{ch} t\, P(t)\, dt \quad \text{pour tout P de E.}$$

   a. Démontrer que φ est linéaire, la mettre sous la forme :
   $\varphi(P)(x) = A(x) \operatorname{ch} x + B(x) \operatorname{sh} x + h(P)$ où A et B sont des polynômes et h(P) un réel indépendant de x. Donner une base de Imφ dans le cas où n = 4.

   b. Soit Ψ l'application de E dans lui-même telle que : $\Psi(P) = A + B$ où A et B sont définis ci-dessus.
   Etudier la linéarité et la bijectivité de Ψ.

   c. Soit h : $P \longrightarrow h(P)$ définie en (II 2.a.). On prend n = 4. Déterminer le noyau de h application de E dans $\mathbb{R}$.

   d. Calculer les valeurs propres et les sous-espaces propres de Ψ. Ψ est-elle diagonalisable ? On appelle M la matrice de Ψ dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[x]$ et I la matrice identité de même ordre que M.

   e. Démontrer que $(M-I)^{n+1} = 0$ et que $(M-I)^n \neq 0$. Dans le cas où n = 4, calculer M. Calculer M^{-1} en fonction de I, M, M^2, M^3, M^4. Donner M^{-1} sous forme explicite.

Partie III

1. Soit λ une constante complexe ; $y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction dérivable de la variable réelle x à valeurs complexes vérifiant :
   $y' = \frac{dy}{dx} = \lambda y$. Calculer y.

2. On considère l'équation différentielle réelle d'ordre 4 :
   (1) $y - y' + y'' - y^{(3)} + y^{(4)} = 0$ où y est une fonction inconnue 4 fois dérivable sur $\mathbb{R}$.
   On pose : $Y = Y(x) = \begin{bmatrix} y^{(3)} \\ y'' \\ y' \\ y \end{bmatrix}$ la matrice colonne représentant aussi une fonction vectorielle de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^4$. Soit Y' la fonction vectorielle dérivée de Y sous forme de matrice colonne.
   Démontrer que : $Y' = S.Y$ où S est une matrice 4x4 que l'on précisera.

3. Démontrer que S considérée comme matrice complexe est diagonalisable sur $\mathbb{C}$.

4. Expliciter une matrice diagonale D semblable à S ainsi qu'une matrice complexe T telle que : $D = T^{-1}S\,T$. (On utilisera les nombres ω_0 et ω_1 racines cinquièmes de -1 non réelles et non conjuguées).

5. On pose : $Z = T^{-1}Y$. Calculer : $Z = Z(x)$.

6. En déduire les solutions réelles de l'équation différentielle (1).

7. Résoudre l'équation différentielle :

   $$y - y' + y'' - y^{(3)} + y^{(4)} = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}x - \frac{3}{8}x^2 + \frac{1}{24}x^3 - \frac{1}{96}x^4$$

---

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail